70. 二次元閉集合体上ノ測地線ノ延長 (II)

(阪大) 矢島 [illegible]

前雑誌(第5号：6月10日) デハ E(4) ハ一次元連結集合デアルコトヲ証明シ

マシタ。本号デハ更ニ $E(a)$ ハ (1) 局所連結ナルコト (2) arcwise ニ連結ナルコトヲ証明シマス。

6. 基本予備定理

先ヅ前談話デ屡々用ヒタ $H(A.B)$ ノ論法ヲ整理シテ基本予備定理トシテ掲ゲマス。前談話ノ (4.C) 以外ハ若干ノ修正ヲ施シテ此ノ基本予備定理ガ使ヘマスガ．(4.C) ハ考ヘハ同ジデスガ此ノ基本予備定理トハ若干異ナリマス。

$\boxed{\text{基本予備定理}}$ 一点 a トミッツノ集合 $A.B.C$ ガアッテ

(i) C ハ連結集合

(ii) $x \in C$ ナラバ $\overline{ax} \cdot (A+B) \neq 0$

(iii) $x \in C$ デ $\overline{ax} \cdot \bar{A} \neq 0$ ナラバ $\overline{ax} \cdot B = 0$，$\overline{ax} \cdot \bar{B} \neq 0$ ナラバ $\overline{ax} \cdot A = 0$

(iv) $\overline{ax_1} \cdot A \neq 0$，$\overline{ax_2} \cdot B \neq 0$ トナルヤウナ $\overline{ax_1}$，$\overline{ax_2}$ $(x_1, x_2 \in C)$ ガ存在スルナルトキ $x_0 \in C$ ガ存在シテ a，x_0 ハ少クモニツノ異ナル g.s. デ結バレル．即 slit ニナル．

(注) C ヲ二組ニ分ケル．$x \in C$ ナルトキ $\overline{ax} \cdot A \neq 0$ トナル $\overline{ax}$ ガアレバ．$x \in C_A$，$\overline{ax} \cdot B \neq 0$ ナラ $x \in C_B$ トスル．(iv) カラ $C_A \neq 0$，$C_B \neq 0$ 且 (ii) カラ $C = C_A + C_B$．(i) カラ $C_A \overline{C_B} + \overline{C_A} C_B \neq 0$ 何レデモ同ジダカラ $C_A \overline{C_B} \neq 0$ トスル．$x_0 \in C_A$，$x_i \in C_B$，$x_i \to x_0$ トナル x_0 ト $\{x_i\}$ ガアル．$x_i \in C_B$ ダカラ $\overline{ax_i} \cdot B \neq 0$ トナル $\overline{ax_i}$ ガアル．$x_i \to x_0$ ナルトキ $\overline{ax_i}$ ハ a ト x_0 ヲ結ブ g.s. ノ一ツ $\overline{ax_0}$ ニ收斂スル．$\overline{ax_0'} \cdot \bar{B} \neq 0$ デアル．(iii) ニヨリ $\overline{ax_0'} \cdot A = 0$ デアル．シカルニ $x_0 \in C_A$ ダカラ $\overline{ax_0''} \cdot A \neq 0$ トナル $\overline{ax_0''}$ ガ存在スル．$\overline{ax_0'}$ ト $\overline{ax_0''}$ ハ明ラカニ異ナルカラ a ト x_0 ヲ結ブ少クモニツノ g.s.，即チ slit ガ得ラレタ．(以上)

基本予備定理ノ応用トシテ次ノコトガ言ヘマス。

(6.A) 任意ノ $\overline{ab}$ ニ対シ $c \in \overline{ab}$，$cb < \delta/2$ ナル点 c ヲトレバ $\overline{cb}$ ハ延長出来ル．($\overrightarrow{cb}$ ガ延長出来ルトハ $\overline{cb}$ ガ b ノ方向ニ延長出来ルコト)

(証) $\overline{ab}$ 上ニ $cb < \delta/2$ ナル点 c ヲトルトキ $\overrightarrow{cb}$ ガ延長出来ナイトスル．

b ヲ中心トシ cb ヲ半径トスル円ヲ K_b トシ．c ヲ中心トシテ $\rho > 0$ $(\rho < \mathrm{Min}(ca, cb))$ ヲ半径トスル円ヲ K_c トスル．K_c ハ $\overline{ab}$ ニヨリ

ニツノ弧ニ分ケラレル。其ノ両端ヲ含マナイ部分ヲ A.B トスル。又 Kb ト A ノ交点ノ中 Kb 上デ C カラ最遠ノ点ヲ p. Kb ト B ノ交点ノ中 C カラ最遠ノ点ヲ q トスル。Kb ハ p.q ニヨリニツノ弧ニ分タレル。Kc ノ内部ト共通点ヲ持タナイ方ヲ p.q モ含メテ C トスル。点 C ヲ基本予備定理ノ a ト考ヘルト $x_0 \in C$ ガ存在シテ c, x_0 ハ異ナルニツノ g.c. デ結バレル。コレハ $cx_0 \leqq cb + bx_0 < \hat{d}$ ニ矛盾スル。

7. $\boxed{\text{定理2. } E(a) \text{ ハ局所連結デアル}}$

証) $p \in E(a)$ ニ於テ $E(a)$ ハ局所連結デナイトスル。$\overline{ap}$ 上ニ $qp < \frac{d}{2}$ ナル点 q ヲトレバ (6 A) ニヨリ $\overrightarrow{qp}$ ハ延長出来ル。其ノ延長上ニ p ニ十分近ク r ヲトル。別ニ q ニ於テ $\overline{ap}$ ノ両側ニ (前談話3. 参照) $s.t$ ヲトレバ $\overline{st}$ ハ $\overline{ap}$ ト一点デ交ハル。ソレヲ改メテ q トスル。$\triangle rst$ ノ直径ヲ十分小サクトレバ内部ガアル。ソレヲ U_p トスル。

$p_i \to p$ トナル $E(a)$ ノ点列 $\{p_i\}$ ガアッテ U_p ニ於ケル p, p_i ヲ含ム $E(a)$ ノ成分 C_p, C_{p_i} ガ $C_p \cdot \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ トナッタトスル。$\overline{ap_i}$ ハ $i \to \infty$ ナルトキ $\overline{ap}$ ノ一ツニ収斂スルカラ初メカラ $\overline{ap_i} \to \overline{ap}$ ト仮定シテヨイ。故ニ $\overline{st}$ ト $\overline{ap_i}$ ノ交点ヲ q_i トスレバ $q_i \to q$. 簡単ノタメ $q_i \in \overline{qr}$ トスル。任意ノ i ニ対シ $x_i \in \overline{qq_i}$ ヲ適当ニトレバ $\overrightarrow{ax_i}$ ノ延長ガ $\overline{sr}$ 又ハ $\overline{tr}$ ニ交ハルヤウニ出来ル。何故 若シソウデナケレバスヘテノ $x \in \overline{qq_i}$ ニ対シ $\overline{ax}$ ノ極遠点ハ U_p 内ニアル。其ノ集合ハ予備定理2ト同一ノ方法ニヨリ U_p ノ内部ニ於ケル $E(a)$ ノ連結集合ニ含マレ 従ッテ $C_p \overline{C_{p_i}} + \overline{C_p} \cdot C_{p_i} = 0$ ニ反ス。故ニ $x_i \in \overline{qq_i}$ ガアッテ $\overrightarrow{ax_i}$ ノ延長ハ $\overline{sr}$ 又ハ $\overline{rt}$ ニ交ハル 交点ヲ y_i トスル。$\overline{x_i y_i}$ ハ U_p ヲ二ツノ部分ニ分ケ其ノ各々ノ部分ニ p. p_i ガ含マレル。$i \to \infty$ トスルトキ $p_i \to p$ ダカラ $\overline{ay_i}$ ノ内ノ点デ p ニ収斂スルモノガアル。コレハ $p \in E(a)$ ニ反ス。

8. $\boxed{\text{予備定理3} \quad p \in E(a) \text{ ナルトキ } \varepsilon > 0 \text{ ヲ十分小ニトレバ } E(a) \cdot S(p, \varepsilon) \text{ ノ } p \text{ ヲ含ム成分ハ arcwise ニ連結デアル。}}$

(証) $\varepsilon < \frac{d}{4}$ トシテ $S(p, 2\varepsilon)$. $S(p, \varepsilon)$ ノ境界ヲ夫々 K_1, K_2 トスル。
$E(a) \cdot S(p, \varepsilon)$ ノ p ヲ含ム成分ヲ C_p トスル。$q \in C_p$ ナルトキ $p.q$ ガ $E(a)$

ノ a.b.c デ結バレルコトヲ証明スル. $\overline{ap}$ ト K_1, K_2 ハ夫々唯一点デ交ハル b.c. トスル. $\overline{aq}$ ハ K_1, K_2 ト一般ニハ一点デ交ハラナイガ其ノ交点ノ集合ハ閉集合ダカラ K_2 上ヲ c カラ一定ノ方向ニ進ムトキ最初ノ点ト最後ノ点ガアル. 夫々 r.s トスル. K_2 ノ弧 $\widehat{cr}$, $\widehat{cs}$ ヲ夫々 A.B トシ其ノ両端ヲ除イタモノヲ A', B' トスル. 又 $\overline{rs}=C$ トスレバ $C \subset S(p\,2\varepsilon)$ デ C ハ $\overline{ap}$ ト交ハラナイカラ, $A+B+C=K_2'$ トスレバ, K_2' ハ円ト位相合同デ $S(p\ 2\ \varepsilon)$ ニ含マレ p ヲ内部ニ含ム. q ハ K_2' ノ内部ニ含マレル. 何者 若シ外部ニアレバ $C\,C_p \neq 0$ トナリ C ガ $\overline{aq}$ ノ内ノ点ノ集合ナルコトニ反ス. $r \in \overline{qs}$ 又ハ $s \in \overline{qr}$ デアルガ $r \in \overline{qs}$ トスル. $\overline{rq}$ ハ全ク K_2' ノ内部ニアル. $\overline{aq}$ ト K_1 ノ交点ノ中 s ニ最モ近イ点ヲ t トスル.

K_2' ノ内部ニアッテ $\overline{rq}$ ト交ラズ且 p ヲ内部ニ含ム多角形 P ヲトル（多角形トハ有限個ノ点ヲ順ス q-s デ結ンダ円ト位相合同ナ図形）P ト $\overline{ap}$ ノ交点ヲ P ノ順序ニ従ッテ $d_1, d_2 \cdots\cdots d_n$ トスル. d_i ト d_{i+1} ヲ結ブ P ノ部分ヲ P_i トスレバ $P_i+\overline{d_i d_{i+1}}$ ガ p ヲ内部ニ含ムヤウナ i ガアル. $i=1$ トスル. P_1 ハ, d_1, d_2 ノ他 $\overline{ap}$ ト共通点ヲ持タナイ. P_1 カラ d_1, d_2 ヲ除イタ部分ヲ P_1' トスレバ $x \in P_1'$ ニ対シ $\overline{ax}$ ハ $A+B'$ ニ必ズ交ハル. 又 $\overline{ax}\cdot A' \neq 0$ ナラバ $\overline{ax}\cdot B'=0$ デアル. 何者若シソウデナケレバ $\overline{ax}$ ハ A', B' ト共通点ヲ持ツ y_1, y_2 トスル. $\overline{y_1 y_2} \subset S(p,\ 2\varepsilon)$ デアル. $\widehat{cy_1}+\overline{y_1 y_2}+\widehat{cy_2}=K_2''$ トスレバ p ハ K_2'' ノ内部ニ含マレ q ハ外部ニアル. 従ッテ $C(p.q)$ ガ連結ナルコトニ反ス. 故ニ $\overline{ax}\cdot A' \neq 0$ ナラ $\overline{ax}\cdot B'=0$. 同様ニ $\overline{ax}\cdot B' \neq 0$ ナラ $\overline{ax}\cdot A'=0$. 次ニ x ヲ d_1, d_2 ノ十分近クニトレバ, $\overline{ax_1}\cdot A' \neq 0$, $\overline{ax_2}\cdot B' \neq 0$ トナル x_1, x_2 ノ存在スルコト明ラカデアル.

基本予備定理ニ於ケル A.B.C トシテ A', B', P_1' ヲトレバ $x_0 \in P$ ガアッテ a, x_0 ハ夫々 A', B' ニ交ハル二ツノ q.s デ結バレル. 故ニ $x_0 \in E(a)$. P ヲ任意ニトルトキ x_0 ノ集合ニ p.q. ヲ加ヘタモノヲ $C(p,q)$ トスル. $x_i \in C(p,q)$, $x_i \to x$ ナラバ a, x ハ夫々 A, B' ト交ハル二ツノ q.s デ結バレルカ又ハ x ハ p.q ト一致スル. 故ニ $C(p,q)$ ハ閉集合デアル.

次ニ $C(p.q)$ ガ連結集合ニナルコトヲ言フ 連結デナイトシテ p ヲ含ム成

分ヲ$C_1(p,q)$、残リヲ$C_2(p,q)$トシ $C_1(p,q)$ト$C_2(p,q)$ノ距離ヲδ_1トスル。$\delta_1>0$. $C_1(p,q)$ト$K_2'+\overline{rq}$トハ閉集合デ共通点ヲ持タナイカラ距離$\delta_2>0$ガアル。K_2'及ビ其ノ内部ヲ三角形分割シテ各々ノ三角形ノ直径ガ$\frac{\rho}{3}$ ($\rho<\min(\delta_1,\delta_2)$) ヨリ小ニナルヤウニスル。$C_1(p,q)$ノ点ヲ内部又ハ辺上ニ持ツ三角形ノ和集合ノ境界ハ一般ニ数個ノ多角形カラナリ、且$C_1(p,q)$, $C_2(p,q)$, $K_2'+\overline{rq}$ノ点ヲ含マナイ。其ノ中ニpヲ内部ニ含ムモノガ存在スル。コレヲPトスレバPハK_2'ノ内部ニアリ$\overline{rq}$ニ交ラズpヲ内部ニ含ム。故ニPノ上ニ$C(p,q)$点ガアル 矛盾。故ニ$C(p,q)$ハ連結集合デアル。

$x\in C(p,q)$トスレバaxヲ結ビ、夫々A', B'ト交ハル二ツノ$q\,s$ガアル。$\overline{ax}^1$; $\overline{ax}^2$トスル。$\overline{ax}^1+\overline{ax}^2$ハ$K_2'$ヲ二ツノ部分ニ分ケ各々ノ部分ニ$p,q$ヲ含ムカラ$x$ハ$C(p,q)$ノcut pointデアル。故ニ$C(p,q)$ハ$p,q$ヲ結ブarcデアル。

定理3. $E(a)$ハarcwiseニ連結デアル。

(証) 定理2ト予備定理3トカラ容易ニ証明出来ル。

後記 コレデ一應報告ヲ終リマス。$E(a)$ガarcwiseニ連結ナコトガ言ヘマシタカラ、コレカラ$E(a)$ノorderニ関スルコトハ容易ニ出マスガ面白クナイカラ省略シマス。此ノ頃 $E(a)$ノ1-dimベッチ数トΩノ1-dimベッチ数ガ等シイコトモ成立シソウデスガ未ダ証明出来マセン。(実ハコレガ本談話ノ主目的ナノデスガ)。尚此ノ研究ニハ寺阪教授ノ一方ナラヌ御指導ヲ得マシタコトヲ衷心ヨリ感謝致シマス。　(1947. 11. 2)